Merkwürdige Eigenschaften der stochastischen Unabhängigkeit[1]

JÖRG MEYER, HAMELN

[1] Original: Independence may feel strange.
In: *Teaching Statistics* 39(2017), S. 96–99.
Übersetzung und Ergänzung: JÖRG MEYER

Zusammenfassung: *Für das Vorliegen von stochastischer Unabhängigkeit hat man nicht immer das richtige „Bauchgefühl“, wie an mehreren Beispielen illustriert wird. Auch die Beziehung zur kausalen Unabhängigkeit ist verwickelter, als man vielleicht vermutet.*

Einleitung

Am Anfang einer stochastischen Modellierung steht häufig die Frage, ob zwei Ereignisse stochastisch unabhängig voneinander sind oder nicht. Wenn alle in Frage kommenden Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, lässt sich die Frage nach der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse A und B leicht dadurch entscheiden, dass man überprüft, ob die Formel $p(A|B) = p(A)$ bzw. $p(A \cap B) = p(A)\ p(B)$ gilt oder nicht. In erstaunlich vielen Fällen ist der Weg über die Formel die einzige Möglichkeit, die Frage nach der stochastischen Unabhängigkeit zu entscheiden. In einem der einflussreichsten Bücher zur Stochastik, nämlich bei Feller ([3]1970), steht auf S. 125 und 126: „Es gibt Situationen, in denen nur durch Berechnung entschieden werden kann, ob stochastische Unabhängigkeit vorliegt oder nicht. („,) Es ist nicht immer offensichtlich, ob Unabhängigkeit vorliegt oder nicht“. Und in der neueren Publikation Batanero und Borovcnik (2016) ist auf S. 79 zu lesen: „Obwohl der Begriff der Unabhängigkeit grundlegend für die Stochastik ist, ist es schwierig, ihn ohne Bezug auf Formeln zu erklären.“

Der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit lässt sich tatsächlich kaum mit alltäglichen Erfahrungen verknüpfen, obwohl der Begriff „Unabhängigkeit“ im Alltag häufig vorkommt. Dies kann dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler unpassende Grundvorstellungen zu diesem Begriff entwickeln oder ihn auch einfach mit der kausalen Unabhängigkeit vermengen.

Daher geht es in diesem kurzen Artikel *nicht* darum, wie man die stochastische Unabhängigkeit einführt oder berechnet, sondern um einige verwirrende Eigenschaften dieses Begriffs. Dabei beschränke ich mich auf die paarweise stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen; schon hier gibt es einige Merkwürdigkeiten. Um uninteressante Fälle auszuschließen, gelte für jedes im Folgenden vorkommende Ereignis E, dass für dessen Wahrscheinlichkeit stets $0 < p(E) < 1$ gilt.

Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so wird dies durch $A \perp B$ ausgedrückt.

Erste Eigenschaften

Naturgemäß ist „$\perp$“ eine *symmetrische* Relation (d. h. aus $A \perp B$ folgt $B \perp A$), sie ist jedoch erwartungsgemäß nicht *reflexiv* (d. h. für kein Ereignis E gilt $E \perp E$ wegen $p(E \cap E) = p(E) > p(E) \cdot p(E)$) (man beachte, dass stets $0 < p(E) < 1$ gelten soll) und, wie man später sehen wird, erstaunlicherweise auch nicht *transitiv*. Diese Eigenschaften hat die stochastische Unabhängigkeit mit dem Senkrechtstehen von Geraden gemeinsam (wenn in der Ebene die Gerade f auf g senkrecht steht und g auf h, so sind f und h zueinander parallel, aber sie stehen nicht aufeinander senkrecht).

Aber die stochastische Unabhängigkeit hat auch verblüffende Eigenschaften, die sie mit dem Senkrechtstehen nicht teilt.

Disjunktheit ist keine Unabhängigkeit

Sind zwei Ereignisse als Mengen zueinander disjunkt, so können beide nicht stochastisch unabhängig sein. Das ist zwar völlig trivial, aber gegenüber Schülerinnen und Schülern zu erwähnen notwendig, um diesbezügliche Fehlvorstellungen gar nicht erst entstehen zu lassen. Dass man mit der Auffassung von Ereignissen als Mengen mitunter auch in anderer Hinsicht auf einen Holzweg gerät, zeigen die Beispiele des folgenden Abschnitts.

Ein Phänomen der Irrelevanz

Eine Urne enthalte vier Kugeln mit den Nummern 1 bis 4, und man ziehe einmal. Ereignis A_{12} bedeute, dass 1 oder 2 gezogen wird, A_{23} bedeute, dass 2 oder 3 gezogen wird und später A_{ijk}, dass i oder j oder k gezogen wird. Die oben erwähnten Formeln besagen wegen

$$p(A_{12} \cap A_{23}) = p(A_2) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = p(A_{12}) \cdot p(A_{23}),$$

dass $A_{12} \perp A_{23}$ gilt.

Stochastik in der Schule 40 (2020) 3, S. 22–27

Dies würde sich jedoch sofort ändern, wenn die Urne nur die eigentlich relevanten Kugeln 1 bis 3 enthalten hätte, denn dann wäre

$$p(A_{12} \cap A_{23}) = p(A_2) = \frac{1}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 = p(A_{12}) \cdot p(A_{23})!$$

Auch wenn die Urne noch weitere irrelevante Kugeln enthalten hätte (wie etwa 1 bis 5 oder 1 bis 8) hätte man keine stochastische Unabhängigkeit mehr; diese tritt tatsächlich nur ein für die Kugelbesetzung 1 bis 4, d. h. wenn es genau eine irrelevante Kugel gibt, denn wenn i die Anzahl der irrelevanten Kugeln angibt, ist $p(A_{12} \cap A_{23}) = p(A_2) = \frac{1}{3+i}$ und $p(A_{12}) = p(A_{23}) = \frac{2}{3+i}$, was auf die Gleichung $\frac{1}{3+i} = \left(\frac{2}{3+i}\right)^2$ mit der Lösung $i = 1$ führt. Das hätte man ohne die Formel niemals geahnt!

Betrachtet man die Ereignisse A_{123} und A_{124}, so hat man für keine Urnenbelegung mit unterschiedlich nummerierten Kugeln stochastische Unabhängigkeit, denn $\frac{3}{i+4} \cdot \frac{3}{i+4} = \frac{2}{i+4}$ hat die Lösung $i = \frac{1}{2}$. Die Ereignisse A_{123} und A_{145} sind nur dann stochastisch voneinander unabhängig, wenn die Urne die Kugeln 1, 2, …, 8, 9 enthält, denn $\frac{3}{5+i} \cdot \frac{3}{5+i} = \frac{1}{5+i}$ hat die Lösung $i = 4$.

Hier sind weitere Aufgaben möglich, etwa, dass die Ereignisse A_{12} und A_{234} nur für 6 Kugeln stochastisch unabhängig voneinander sind, da $\frac{2}{4+i} \cdot \frac{3}{4+i} = \frac{1}{4+i}$ die Lösung $i = 2$ hat.

Dass offensichtlich irrelevante Begleitumstände mitunter einen Einfluss auf das Vorliegen von stochastischer Unabhängigkeit haben können, entspricht nicht dem „Bauchgefühl“ zur Unabhängigkeit, insbesondere nicht, dass genau eine bestimmte Anzahl irrelevanter Kugeln zur stochastischen Unabhängigkeit gebraucht wird, und dass für manche Ereignisse gar keine stochastische Unabhängigkeit erreicht werden kann.

Der Grund für dieses falsche Bauchgefühl liegt darin, dass stochastische Unabhängigkeit kein Begriff ist, der sich auf Ereignisse als Mengen bezieht, sondern sich auf Ereignisse als Mengen zusammen mit Wahrscheinlichkeiten bezieht. Letztere können sich durch das Hinzufügen irrelevanter Kugeln durchaus ändern!

Der Einfluss irrelevanter Alternativen ist vielleicht einfacher zu verstehen, wenn man das Urnenbeispiel etwas in Richtung des bekannten Ziegenproblems modifiziert und bedingte Wahrscheinlichkeiten betrachtet:

Der Kandidat soll zwischen vier (gleich aussehenden) Türen wählen; er wird den hinter der Tür befindlichen Gegenstand behalten dürfen. Hinter den Türen 1 und 2 ist jeweils ein Auto (was der Kandidat aber nicht weiß), und hinter den Türen 3 und 4 jeweils eine Ziege. Das Ereignis A_{ij} bestehe darin, dass der Kandidat Tür i oder Tür j wählt. Die Wahrscheinlichkeit für A_{12} beträgt 2/4. Aus irgendeinem Grund beachtet der Kandidat nicht die Türen 1 und 4. Daher ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, Tür 1 oder 2 zu wählen, so groß wie

$$p(A_{12}|A_{23}) = \frac{p(A_{12} \cap A_{23})}{p(A_{23})} = \frac{p(A_2)}{p(A_{23})} = \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet, dass $A_{12} \perp A_{23}$ gilt. Wenn es aber neun Türen gegeben hätte (und hinter 1 und 2 jeweils ein Auto) und der Kandidat aus irgendeinem Grund nur die Türen 2 und 3 beachtet hätte, dann wäre die unbedingte Wahrscheinlichkeit $p(A_{12}) = \frac{2}{9}$ viel kleiner als die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(A_{12}|A_{23}) = \frac{p(A_2)}{p(A_{23})} = \frac{1}{2}$, so dass A_{12} und A_{23} nicht mehr stochastisch unabhängig sind. Allerdings hätte man auch bei Verwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten kaum geahnt, welche Anzahl von Türen zur stochastischen Unabhängigkeit führt.

Merkwürdige Abhängigkeiten

Eine Euro-Münze mit der üblichen nationalen und der internationalen Seite wird n-mal geworfen, dabei sei $p(\text{national}) = \pi$ und $p(\text{international}) = 1 - \pi$ mit $0 < \pi < 1$.

Ereignis A bedeute, dass bei den n Würfen höchstens einmal die nationale Seite fällt, und B bedeute, dass alle Würfe immer dieselbe Seite zeigen. Dann ist

$$p(A) = \binom{n}{0} \cdot \pi^0 \cdot (1-\pi)^n + \binom{n}{1} \cdot \pi^1 \cdot (1-\pi)^{n-1}$$

(bei der Anwendung der Binomialverteilung wird stochastische Unabhängigkeit der Ergebnisse der Einzelwürfe vorausgesetzt!), ferner ist

$$p(B) = \binom{n}{0} \cdot \pi^0 \cdot (1-\pi)^n + \binom{n}{n} \cdot \pi^n \cdot (1-\pi)^0$$

und

$$p(A \cap B) = \binom{n}{0} \cdot \pi^0 \cdot (1-\pi)^n.$$

Ob A und B stochastisch unabhängig sind oder nicht, kann wiederum nur die Rechnung entscheiden. Tabelle 1 zeigt die (mit einem CAS ermittelten) Ergebnisse. Ist die Münze fair, so ist stochastische Unabhängigkeit nur für $n = 3$ vorhanden, was so nicht abzusehen war. Auch die Resultate für $n > 3$ wären ohne die Formel kaum zu vermuten gewesen.

n	Stochastische Unabhängigkeit?
2	niemals
3	nur für $\pi = 0{,}5$
4	nur für $\pi = 0{,}59$
5	nur für $\pi = 0{,}63$
6	nur für $\pi = 0{,}655$
7	nur für $\pi = 0{,}675$
8	nur für $\pi = 0{,}692$
9	nur für $\pi = 0{,}707$
…	…
100	nur für $\pi = 0{,}9305$

Tab. 1: Zur stochastischen Unabhängigkeit bei Münzwürfen

Ein weiteres Beispiel mit einer merkwürdigen Abhängigkeit

Man habe eine Urne mit einer weißen und einer schwarzen Kugel und ziehe n-mal mit Zurücklegen (mit $n > 1$) und betrachte die Ereignisse

A: Bei den n Ziehungen kommen beide Farben vor,

B: Bei den n Ziehungen kommt „weiß" höchstens einmal vor.

Dann ist $p(A) = \frac{2^n - 2}{2^n}$ (denn es müssen nur die beiden einfarbigen Sequenzen *ww…w* und *ss…s* ausgeschlossen werden) und $p(B) = \frac{n+1}{2^n}$ (denn „weiß" kann an jeder Stelle stehen oder kommt gar nicht vor) sowie $p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ (denn „weiß" muss genau einmal vorkommen). Natürlich hätte man hier auch die Formeln der Binomialverteilung anwenden können.

Ist $A \perp B$? Die zu überprüfende Formel führt auf

$$\frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}}{2^n} = \frac{\binom{n}{1}}{2^n}$$

bzw. auf

$$2^n = 2 \cdot n + 2,$$

und diese Beziehung ist nur richtig für $n = 3$. Auch das hätte man nicht vermutet (und ohne die Formel auch nicht sehen können): Nur wenn man dreimal zieht, sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig voneinander.

Ändert man B ab zu

B‘: Bei den n Ziehungen kommt „weiß" höchstens zweimal vor,

hätte man die Beziehung

$$\frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}}{2^n} = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}}{2^n}$$

zu überprüfen, die auf $n = 5$ führt. Dass tatsächlich $n = 5$ die Lösung ist, lässt sich mit Tabellenkalkulation gut ermitteln.

Solche Fragestellungen bestätigen einerseits das Gefühl, dass man vielen Ereignissen die stochastische Unabhängigkeit nicht ansieht, und andererseits üben sie den Umgang mit der Binomialverteilung. Ferner führen sie auf natürliche Weise zu dem Problem, wie man Gleichungen löst, für die es keine Lösungsformel gibt (dies war schon bei Tabelle 1 der Fall).

Beziehungen zu Durchschnitt und Vereinigung

Da das Vorliegen stochastischer Unabhängigkeit stark von den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten abhängt, ist zu vermuten, dass sich der Begriff mit Durchschnitt- und Vereinigungsbildungen nicht gut verträgt. In der Tat: Bei einer Urne mit den Kugeln 1 bis 4 und

A_{ij}: Es wird i oder j gezogen (entsprechend, wenn man eine andere Anzahl von Kugeln zieht)

gilt $A_{12} \perp A_{13}$ und $A_{12} \perp A_{14}$, aber weder ist A_{12} stochastisch unabhängig von $A_{13} \cup A_{14} = A_{124}$ noch von $A_{13} \cap A_{14} = A_1$.

Hat man eine Urne mit 9 Kugeln, so ist zwar $A_{123} \perp A_{145}$, aber weder ist A_{123} stochastisch unabhängig von A_1 noch von A_{12345}.

Warum ist das interessant? Der Grund liegt darin, dass die Situation bei kausaler Unabhängigkeit anders ist. Ist Ereignis A sowohl von B als auch von C kausal unabhängig ist, so wird A auch von $B \cap C$ kausal unabhängig sein. Und wenn im Raum eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht steht, dann auch auf der Schnittgeraden.

Zur kausalen Unabhängigkeit

Zwei Aussagen sollen *kausal abhängig* heißen, wenn aus der einen die andere oder das logische Gegenteil der anderen folgt. Man könnte sich andere Definitionen der kausalen Abhängigkeit vorstellen, etwa über eine „reale Beeinflussung" nach Henze ([10]2013, S. 120 f.), wonach beim Wurf mit zwei Würfeln die Ereignisse „Augensumme ist gerade" und „der erste Wurf zeigt eine ungerade Zahl" sich zwar gegenseitig beeinflussen, ohne dass man das eine Ereignis aus dem anderen kausal folgern könnte. Im Folgenden soll mit der zu Beginn dieses Abschnitts formulierten Definition gearbeitet werden. Dabei wird hier auch nicht der Fall berücksichtigt, dass zwei Aussagen kausal aus einer dritten folgen, ohne dass sie sich gegenseitig kausal beeinflussen.

Zwei Aussagen sind *kausal unabhängig* genau dann, wenn sie nicht kausal voneinander abhängig sind.

Übergang zu Teil- oder Oberereignissen

Es verwundert nicht, dass die stochastische Unabhängigkeit auch nicht erhalten bleiben muss, wenn man zu Teilereignissen oder zu Oberereignissen übergeht. So gilt bei einer Urne mit den Kugeln 1 bis 4 sowie den Ereignissen

A_{ij}: Es wird die Kugel *i* oder *j* gezogen (analog, wenn es mehrere oder weniger Indizes gibt)

die Beziehung $A_{12} \perp A_{23}$, aber nicht $A_{12} \perp A_2$ und auch nicht $A_{12} \perp A_{234}$.

Allerdings ist der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit verträglich mit Vergröberungen, die durch Einteilungen von stochastisch unabhängigen Ereignissen in zueinander disjunkte Blöcke entstehen (vgl. Henze [10]2013, Kap. 16.6).

Zur bedingten stochastischen Unabhängigkeit

Man könnte auch auf die Idee kommen, bei *allen* vorkommenden Ereignissen Untermengen zu betrachten. Dies passiert bei der *bedingten* stochastischen Unabhängigkeit, die durch die Gleichung $p(A \cap B|C) = p(A|C) \cdot p(B|C)$ definiert ist. Dass die bedingte stochastische Unabhängigkeit kausal unabhängig ist von der unbedingten stochastischen Unabhängigkeit, sieht man etwa an folgendem Beispiel:

Man werfe eine Münze mit den Seiten „0" und „1" dreimal; X_k sei das Ergebnis des *k*-ten Wurfs, und S_k die Summe der ersten *k* Wurfergebnisse (Tabelle 2).

Dann ist $p(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, $p(S_3 = 1) = \frac{3}{8}$ und $p(X_1 = 1 \wedge S_3 = 1) = \frac{1}{8}$, also sind die Ereignisse $X_1 = 1$ und $S_3 = 1$ nicht stochastisch unabhängig voneinander.

X_1	X_2	X_3	S_2	S_3
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	2
1	0	0	1	1
1	0	1	1	2
1	1	0	2	2
1	1	1	2	3

Tab. 2: Beispiel zur bedingten stochastischen Unabhängigkeit

Andererseits ist jedoch $p(X_1 = 1|S_2 = 1) = \frac{1}{2}$ und $p(S_3 = 1|S_2 = 1) = \frac{1}{2}$ sowie $p(X_1 = 1 \wedge S_3 = 1|S_2 = 1) = \frac{1}{4}$, so dass die bedingten Ereignisse $X_1 = 1|S_2 = 1$ und $S_3 = 1|S_2 = 1$ nunmehr stochastisch voneinander unabhängig sind.

Es geht auch andersherum: Die Ereignisse $X_1 = 1$ und $X_2 = 1$ sind stochastisch unabhängig voneinander. Für die bedingten Ereignisse $X_1 = 1|S_2 = 1$ und $X_2 = 1|S_2 = 1$ gilt dies wegen $p(X_1 = 1|S_2 = 1) = p(X_2 = 1|S_2 = 1) = \frac{1}{2}$ und $p(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1|S_2 = 1) = 0$ allerdings nicht mehr.

Durch die Bedingtheit kann somit stochastische Unabhängigkeit entstehen, aber auch vergehen.

Zur Komplementbildung

Die Komplementbildung ist allerdings verträglich mit der stochastischen Unabhängigkeit:

Es sei $A \perp B$ und $\overline{B}$ das Gegenereignis zu B (das genau dann eintritt, wenn B nicht eintritt). Dann folgt aus der Beziehung $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, dass wegen $A \cap \overline{B} = A - A \cap B$ auch

$$\begin{aligned} p(A \cap \overline{B}) &= p(A) - p(A \cap B) \\ &= p(A) - p(A) \cdot p(B) \\ &= p(A) \cdot (1 - p(B)) \\ &= p(A) \cdot p(\overline{B}) \end{aligned}$$

gilt. Die Beziehungen

$$A \perp B,\ A \perp \overline{B},\ \overline{A} \perp B,\ \overline{A} \perp \overline{B}$$

sind also alle zueinander äquivalent.

Jedoch gilt für kein Ereignis E (abgesehen von den ausgeschlossenen sicheren oder unmöglichen Ereignissen) die Beziehung $E \perp \overline{E}$ wegen $0 = p(E \cap \overline{E}) < p(E) \cdot p(\overline{E})$. Dies entspricht auch dem „Bauchgefühl“: Natürlich sollte das Eintreten eines Ereignisses abhängig sein davon, ob sein Gegenteil eintritt.

Stochastische Unabhängigkeit ist nicht transitiv

Auf den ersten Blick verblüfft die Tatsache, dass die stochastische Unabhängigkeit nicht transitiv ist: So gilt für eine Urne mit den Kugeln 1 bis 6, dass die Beziehungen $A_{12} \perp A_{234}$ und $A_{234} \perp A_{13}$ gelten, nicht aber $A_{12} \perp A_{13}$.

Oder man stelle sich vor, mit zwei fairen Würfeln nacheinander zu werfen. Für die Ereignisse

A: Der erste Würfel zeigt eine „6“,

B: Die Augensumme ist 7,

C: Der erste Würfel zeigt eine „5“.

zeigt Abb. 1, dass $A \perp B$ und $B \perp C$ gilt, aber natürlich *nicht* $A \perp C$.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Abb. 1: Beispiel zur Nichttransitivität beim Würfeln

Übrigens setzt diese Argumentation (wie schon bei früheren Beispielen) die stochastische Unabhängigkeit aller Würfelergebnisse voraus.

Allerdings hat man auch bei kausaler Unabhängigkeit keine Transitivität (dass heute der 3. 7. ist, ist kausal unabhängig davon, dass Kolumbus Amerika entdeckt hat, und gleiches gilt von dem Faktum, dass morgen der 4. 7. sein wird, aber die beiden Datumsangaben hängen sehr wohl kausal voneinander ab). Solche Strukturgleichheiten mögen auch dazu beitragen, dass die stochastische Unabhängigkeit fälschlicherweise mit der kausalen identifiziert wird.

Die Nichttransitivität war zu erwarten

Es ist stets so, dass eine symmetrische, aber nicht reflexive Relation „~“ nicht transitiv sein kann, denn wenn sie transitiv wäre, würde aus $A \sim B$ und $B \sim A$ folgen, dass $A \sim A$ wäre im Widerspruch zur nicht vorhandenen Reflexivität.

Gleichwohl wird man sich im Unterricht nicht auf diese abstrakte Argumentation beschränken wollen, sondern ein konkretes Beispiel wie das eben angeführte erläutern (oder, besser noch, von Schülerinnen und Schülern selbst finden lassen).

Beziehung zur kausalen Unabhängigkeit

Dass kausale und stochastische Unabhängigkeit nicht dasselbe bedeuten können, meint man schon daran sehen zu können, dass die kausale Abhängigkeit symmetrisch ist. Allerdings ist auch die stochastische Abhängigkeit symmetrisch (Meyer 2019, S. 25). Man braucht also handfeste Beispiele.

Betrachten wir eine Urne mit zwei Kugeln, die die Ziffern „1“ und „2“ tragen. Zweimal wird eine Kugel gezogen und nach jeder Einzelziehung zurückgelegt. Folgende Ereignisse seien definiert:

Ereignis A bedeute, dass die erste gezogene Kugel eine „1“ trägt, B bedeute, die zweite gezogene Kugel eine „1“ trägt, S bedeute, dass die Ziffernsumme 3 beträgt. Gelten A und B, dann nicht S, und gelten A und S, dann nicht B und gelten B und S, dann nicht A. Gleichwohl hat man wegen der möglichen Wurfergebnisse 11, 12, 21, 22 die Wahrscheinlichkeiten $p(A) = p(B) = p(S) = \frac{1}{2}$ und $p(A \cap B) = p(B \cap S) = p(S \cap A) = \frac{1}{4}$, so dass jeweils $A \perp B$, $B \perp S$ und $S \perp A$ gilt.

Kausale Abhängigkeiten können sich also durchaus mit stochastischer Unabhängigkeit vertragen.

Bei nur zwei Ereignissen ist es so, dass kausale Abhängigkeit die stochastische Abhängigkeit zur Folge hat:

Wenn ein Ergebnis S das Ereignis T zur (kausalen) Folge hat, dann gilt $p(S) \leq p(T)$ und somit $p(S \cap T) = p(S) \neq p(S) \cdot p(T)$, falls $p(S) > 0$ ist.

Analog kann man argumentieren, wenn S das logische Gegenteil von T zur Folge hat.

Aus kausaler Unabhängigkeit folgt nicht die stochastische Unabhängigkeit: Ein erstes Beispiel

Falk und Bar-Hillel (1983; S. 246) betrachteten eine Urne mit vier Kugeln, zwei weißen und 2 schwarzen. Sie definierten die Ereignisse

A: Erste Kugel weiß,

B: Zweite Kugel weiß.

Dann ist $p(A) = \frac{1}{2}$ und $p(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 2).

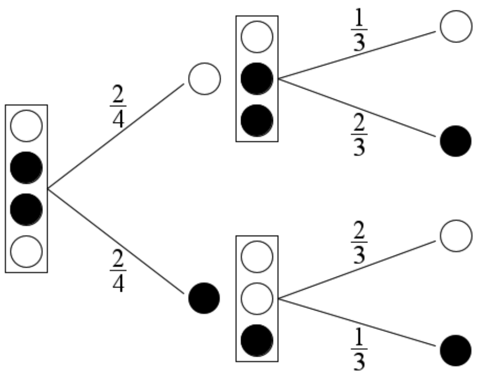

Abb. 2: Zum Beispiel von Falk und Bar-Hillel

Legt man *nicht* zurück, so meint man, dass $p(A|B) = p(A)$ sei, weil die Farbe der ersten Kugel ja wohl nicht von der Farbe der zweiten Kugel abhängen könne. In Wirklichkeit ist jedoch

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

so dass *keine* stochastische Unabhängigkeit vorliegt!

Das bedeutet, dass entgegen der Intuition stochastische Abhängigkeit auch in vermeintlich kausal unabhängigen Situationen auftreten kann.

(Man kann, um dies zu zeigen, die Urne auch anders bestücken, nämlich mit $w > 1$ weißen, $s > 1$ schwarzen und g gelben Bällen.)

Ein weiteres Beispiel dafür, dass aus der kausalen Unabhängigkeit nicht die stochastische folgt

Man habe eine Münze mit den Aufschriften „0“ und „1“, werfe dreimal und betrachte die Ereignisse

A: Der erste Wurf zeigt eine „0“,

B: Die Summe der Aufschriften ist 2.

Die möglichen Wurfresultate sind 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Es ist weder so, dass man von A auf B schließen kann noch von B auf A. Die beiden Ereignisse sind mithin kausal unabhängig. Andererseits sind sie wegen $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{3}{8}$ und $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$ *nicht* stochastisch unabhängig!

Man kann dieses Beispiel verallgemeinern, indem man nicht dreimal, sondern n-mal wirft und statt B das Ereignis

B‘: Die Summe der Aufschriften beträgt $n - 1$

betrachtet. Die kausale Unabhängigkeit bleibt erhalten, und wegen $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{n}{2^n}$ (denn es muss genau eine „0“ vorkommen, und die kann an jeder Stelle stehen) und $p(A \cap B') = \frac{1}{2^n}$ (denn es kommt nur die Sequenz 011…11 in Frage) liegt stochastische Unabhängigkeit nur dann vor, wenn $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2^n}$ bzw. $n = 2$ gilt.

Wiederholungen unter identischen Bedingungen

Oben wurde gesehen, dass aus der kausalen Unabhängigkeit nicht die stochastische Unabhängigkeit folgt.

Damit hat man ein Problem: Wie lässt sich dann generell die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit bei einer stochastischen Modellierung rechtfertigen? So ist die stochastische Unabhängigkeit eine wesentliche Voraussetzung, wenn man etwa mit der Binomialverteilung arbeiten will. Es ist jedoch nur einfach, die kausale Unabhängigkeit zu überprüfen.

Das Verhalten von Wiederholungen unter gleichartigen Bedingungen wird modelliert durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die *Annahme* stochastischer Unabhängigkeit ist Teil dieses Modellierungsprozesses.

Das bedeutet, dass man die stochastische Unabhängigkeit als Annahme hineinstecken muss und dann nur überprüfen kann, ob die Folgerungen, die man dann erhält, mit der Realität hinreichend viel zu tun haben.

Literatur

Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016): Statistics and Probability in High School. Rotterdam: Sense Publishers.

Henze, N. ([10]2013): Stochastik für Einsteiger. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Falk, R. & Bar-Hillel, M. (1983): Probabilistic dependence between events. In: *The College Mathematics Journal* **14**, S. 240–247.

Feller, W. ([3]1970): An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York: Wiley.

Meyer, J. (2019): Zur stochastischen Abhängigkeit. In: *Stochastik in der Schule* **39**(3), S. 25–27.

Anschrift des Verfassers

Dr. Jörg Meyer, Hameln
J.M.Meyer@t-online.de